جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

امتحان مقرر المعادلات التفاضلية (1)

للفصل الدراسي الأول لطلاب السنة الثانية رياضيات

لعام 2014/2013 م.

الاسم :

المدة : ساعتان

الدرجة : (100)

السؤال الأول (40 درجة)

أوجد الحل العام للمعادلتين التفاضليتين التاليتين :

$1)\; x y' - 4y = x^2\sqrt{y}$

$2)\; y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$ ، $y_1 = 1$

السؤال الثاني (30درجة) :

$1)\; (x^2 + x - y)dx + x dy = 0$

$2)\; x y' = y + x\sin\frac{y}{x}$ ، $y(1) = \frac{\pi}{2}$

$3)\; (x^3 + xy)y' = y^2 - x^4$

1) بين فيما إذا كانت المعادلة الأولى تامة أم لا ثم أوجد الحل العام لها .

2) جدّ الحلّ الخاص للمعادلة التفاضلية الثانية وفق الشرط المعطى .

3) أثبت أن المعادلة التفاضلية الثالثة متجانسة في الأبعاد من الدرجة الثانية ثم أوجد الحل العام لها .

السؤال الثالث (30درجة) :

$1)\; x^2 y'^3 - x y' + y = 0$

$2)\; y = x y' - e^{y'}$

$3)\; x y'' + y' = 2x$

1) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأولى وسيطياً .

2) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الثانية مع ذكر نوعها وحلها الشاذ .

3) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الثالثة .

حمص 2014/1/27م.

مع تمنياتي بالنجاح و التوفيق ــــــــ د.ميمون زين الدين

[illegible] السنة [illegible]
العام ٢٠١٢ - ٢٠١٣

الجواب السؤال الأول (40)

1) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

معادلة برنولي نقسم على x و على $\sqrt{y}$ نجد

$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$ ①

نفرض $\sqrt{y} = z \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} = z' \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$ نعوض في ① نجد

$2z' - \frac{4}{x}z = x \Rightarrow \boxed{z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}}$ ②

معادلة خطية غير متجانسة

$z' - \frac{2}{x}z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \boxed{z = cx^2}$ ③

20

نشتق باعتبار c دالة بـ x نجد

$z' = c'x^2 + 2cx$

نعوض z, z' في ② نجد

$c'x^2 + 2cx - 2cx = \frac{x}{2} \Rightarrow c' = \frac{1}{2x}$

بالمكاملة $\Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln x + c_1 \Rightarrow z = x^2(\frac{1}{2}\ln x + c_1) \Rightarrow \sqrt{y} = \dots$

$\Rightarrow \boxed{y = x^4(\frac{1}{2}\ln x + c_1)^2}$

2) $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$ ①; $y_1 = 1$

معادلة ريكاتي نجري التحويل التالي

$y = 1 + \frac{1}{z}$

$\Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2}$ نعوض $-\frac{z'}{z^2} - x(1+\frac{1}{z})^2 + (2x-1)(1+\frac{1}{z})$

$\Rightarrow -\frac{z'}{z^2} - x(1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}) + 2x + \frac{2x}{z} - 1 - \frac{1}{z} = x - 1$

$-z' - xz^2 - 2xz - x + 2xz^2 + 2xz - z^2 - z = xz^2 - z^2$

20

خطية غير متجانسة نحلها بطريقة عامل التكامل

$\boxed{z' + z = -x}$ ②

$\mu = e^{\int dx} = e^x$

نضرب المعادلة ② بـ μ

$d(e^x z) = -xe^x$ بالمكاملة

$e^x z = (1-x)e^x + c \Rightarrow z = 1 - x + ce^{-x}$

العودة للمتحولات القديمة

$\boxed{y = \frac{ce^{-x} - x + 2}{ce^{-x} - x + 1}}$

حل التمرين الأول (30ن)

1) $(x^2+x-y)\,dx + x\,dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \;,\; \frac{\partial Q}{\partial x} = +1 \;,\; \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

والمعادلة ليست تامة لنوجد عامل التكامل

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-2}{x} \Rightarrow d\ln\mu = -2\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln\mu = -2\ln x$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = x^{-2}}$$

10

نضرب طرفي المعادلة بـ μ نجد

$$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{x}\,dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

لنوجد الحل العام بالقاعدة $x_0=1, y_0=0$:

$$F(x,y) = \int_1^x \left(1+\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}\right)dx + \int_0^y dy = \left[x+\ln x+\frac{y}{x}\right]_1^x + y\Big]_0^y =$$

$$= x+\ln x+\frac{y}{x} - 1 - \underset{0}{\ln 1} - \frac{y}{1} + y = x+\ln x+\frac{y}{x}-1$$

$$\Rightarrow \boxed{F = x+\ln x+\frac{y}{x} = C}$$

2) $x y' = y + x\sin\frac{y}{x} \quad ; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$

نقسم على x فنحصل على معادلة متجانسة

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$$

نفرض $\frac{y}{x} = z \Leftarrow y = xz \Leftarrow y' = z + xz'$ نعوض في المعادلة

$$z + xz' = z + \sin z \Rightarrow xz' = \sin z \Rightarrow \frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$$

10

بالمكاملة نجد :

$$\ln\left|\tan\frac{z}{2}\right| = \ln|x| + \ln c$$

بالرفع للعدد النيبري نجد :

$$\tan\frac{z}{2} = cx \Rightarrow z = 2\arctan cx$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = 2\arctan cx \Rightarrow \boxed{y = 2x\arctan cx}$$ الحل العام

باستخدام الشرط المعطى نوجد الحل الخاص

$$\frac{\pi}{2} = 2\arctan c \Rightarrow c = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

والحل الخاص :

$$\boxed{y = 2x\arctan x}$$

$3)\ (x^3 + xy)\, y' = y^2 - x^4$

نبدل x بـ λx وكل y بـ $\lambda^n y$ وكل y' بـ $\lambda^{n-1} y'$ نجد:

ولكن نجد قيمة n ما يختزل λ من جميع حدود المعادلة نجد:

$$\lambda^{n+2} x^3 y' + \lambda^n x y y' = \lambda^{2n} y^2 - \lambda^4 x^4$$

$$n + 2 = 2n = 4 \Rightarrow n = 2$$

المعادلة المعطاة متجانسة بالأبعاد من الدرجة الثانية ومنه نجري التحويل التالي:

نعوض:

$$y' = 2xu + x^2 u' \Leftarrow y = x^2 u$$

$$x^3(2xu + x^2 u') + x(x^2 u)(2xu + x^2 u') =$$

$$= (x^4 u^2 - x^4$$

نفك الأقواس ونختصر على x^4:

$$2u + x u' + 2u^2 + x u u' = u^2 - 1$$

$$x(u+1)u' + 2u(u+1) = (u+1)(u-1)$$

$$x u' + 2u = u - 1 \Rightarrow x u' = -(1+u) \Rightarrow$$

$$\frac{du}{1+u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(1+u) = -\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow (1+u) = \frac{c}{x} \Rightarrow u = \frac{c}{x} - 1 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{c}{x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = cx - x^2}$$

(10)

جواب السؤال الثالث (30):

$$1)\quad x^2 y'^3 - x y' + y = 0$$

المعادلة محلولة بالنسبة لـ y نفرض $y' = p$ نجد:

$$y = xp - x^2 p^3$$

نشتق بالنسبة لـ x نجد:

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x\frac{dp}{dx} - 2xp^3 - 3x^2p^2\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 2p^3 = (1 - 3xp^2)\frac{dp}{dx}$$

حيث p متحول مستقل و x دالة مجهولة نجد:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p}x = \frac{1}{2p^3}$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة بحلها نحصل على الحل العام وسيطياً:

$$x = -p^{-2} + cp^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} x = c p^{-\frac{3}{2}} - p^{-2} \\ y = c p^{-\frac{1}{2}} - p^{-1} - p^3(cp^{-\frac{3}{2}} - p^{-2})^2 \end{cases}$$

(15)

تابع حل السؤال الثالث

2) $y = xy' - e^{y'}$

هي معادلة كليرو $y'=p$ نجد:

$y = xp - e^{p}$

بوضع $p=c$ نجد الحل العام أي:

$y = cx - e^{c}$

(10)

ايجاد الحل الشاذ:

$dy = p\,dx = p\,dx + x\,dp - e^{p}dp$

$\Rightarrow x\,dp - e^{p}dp = 0 \Rightarrow (x - e^{p})dp = 0$

إما $dp = 0 \Leftarrow p = c$ وهكذا نجد الحل العام

أو $x = e^{p} \Leftarrow$ بالتعويض بالمعادلة $y = e^{p}p - e^{p}$ أي: $y = e^{p}(p-1)$

نحصل على الحل الشاذ وسيطياً $\begin{cases} x = e^{p} \\ y = e^{p}(p-1) \end{cases}$ والحل الشاذ ديكارتياً

نحذف p وسيطياً نجد $p = \ln x$ نعوض في y نجد $y = x(\ln x - 1)$

3) $x\,y'' + y' = 2x$

بوضع $y' = p$ نجد:

خطية غير متجانسة:

$p' + \frac{1}{x}p = 2$

(10)

$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$ بالمكاملة

$\ln p = -\ln x + \ln c \Rightarrow p = cx^{-1} \Rightarrow p' = c'x^{-1} - cx^{-2}$

نعوض في المعادلة:

$c'x^{-1} - cx^{-2} + cx^{-2} = 2 \Rightarrow c' = 2x \Rightarrow c = x^2 + c_1$

$p = x + c_1x^{-1} \Rightarrow y' = x + c_1x^{-1} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c_1\ln x + c$